

九十五學年度大學甄選入學考試試題

說明:

- (1) 答題之前請先檢查所取得之答案卷是否正確。
- (2) 本試卷共六題計算證明題，總分共計 100 分。測驗時間 110 分鐘。
- (3) 答題時，請仔細寫下解題過程及計算。若只寫答案，則不予計分。
- (4) 請依題號順序作答。
- (5) 繳卷時請同時繳回題目卷。

第一題

(1) 令 $p(x) = \sum_{k=0}^{10} (-1)^k (k+1) \cdot x^k = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots + 11x^{10}$

(a) $3x+1$ 是否為 $p(x)$ 的因式？請說明理由。(2 分)

(b) $x-2$ 是否為 $p(x)$ 的因式？請說明理由。(2 分)

(2) 試求方程式 $x^4 - x^2 - 2x - 1 = 0$ 的所有實根。(5 分)

(3) 證明方程式 $x^7 + x - 55 = 0$ 恰有一正根。(7 分)

第二題

設 θ 為實數，令 $M_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ ，其中 $M_\theta^n = \underbrace{M_\theta \times M_\theta \times \cdots \times M_\theta}_{n \text{ 個}}$ 。

(1) 設 θ 為實數，證明 $M_\theta^2 = M_{2\theta}$ 。(3 分)

(2) 設 θ 為實數，試證對任意正整數 n ，恆有 $M_\theta^n = M_{n\theta}$ 。(4 分)

(3) 設 $\theta = \frac{\pi}{12}$ ，

(a) 試利用弗美棧定理求 $(M_\theta + M_\theta^2 + \cdots + M_\theta^{23}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 。(6 分)

(b) 視 M_θ 為坐標平面上的變換，驗證(a)中你求得的答案。(5 分)

第三題

(1) 設 $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ ，試求 P^{-1} 。(3分)

(2) 設 $A = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 19 & -7 \end{pmatrix}$ ，試求 $P^{-1}AP$ 。(3分)

(3) 試求 A^{100} 。(5分)

(4) 試求 A^{200} 。(5分)

第四題

設 P 為坐標平面上的任意一點，其坐標為 (a, b) ，我們定義 $P \mapsto \hat{P}$ 的轉換如下：

$$\hat{P} \text{ 的坐標為 } \begin{cases} (a, b) & \text{當 } a \geq b \text{ 時} \\ (b, a) & \text{當 } b > a \text{ 時} \end{cases}$$

(也就是說點 \hat{P} 是將點 P 的坐標分量依遞減順序重新排列而得到的點)。

令 O 為原點， \overline{OP} 為始點為 O ，終點為 P 的向量。

(1) 設 A, B 為坐標平面上二點，其坐標分別為 $(1, 2), (4, 3)$ 。證明

$$\overline{OA} \cdot \overline{OB} \leq \overline{O\hat{A}} \cdot \overline{O\hat{B}}。 (3分)$$

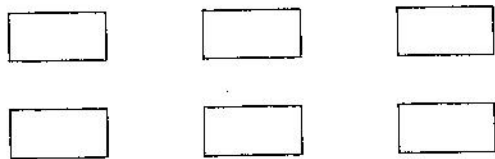
(2) 設 A, B 為坐標平面上任意二點，其坐標分別為 $(a, b), (c, d)$ 。
證明

$$\overline{OA} \cdot \overline{OB} \leq \overline{O\hat{A}} \cdot \overline{O\hat{B}}。 (9分)$$

(3) 請解釋(2)中 $\overline{OA} \cdot \overline{OB} \leq \overline{O\hat{A}} \cdot \overline{O\hat{B}}$ ，" $=$ "成立的幾何意義。(4分)

第五題

某試場共有六個座位，座位安排如下圖所示。



(試場中共有兩排，每排三個座位)

本次考試六名考生 A, B, C, D, E, F 在考試前抽籤安排座位入場應考。其中 A, B 兩考生在考前約定當兩人座位相鄰時，A 考生在考試會給 B 考生看他的答案。

(1) A, B 兩人座位相鄰的機率為多少？ (3分)

(2) 假設 A, B 兩考生爲了讓兩人的答案有所區別，約定當 A, B 兩人座位相鄰時，B 考生第一題的答案必須和 A 考生第一題的答案不同，其他幾題答案則爲相同。已知

(i) 第一題爲單選題，

(ii) A 考生第一題答對的機率爲 $\frac{1}{2}$ ，

(iii) 當 A, B 兩人座位相鄰且 A 考生第一題答錯時，B 考生第一題答對的機率爲 $\frac{1}{3}$ ，

(iv) 當 A, B 兩人座位不相鄰時，B 考生本次考試成績一定會比 A 考生的成績爲低。

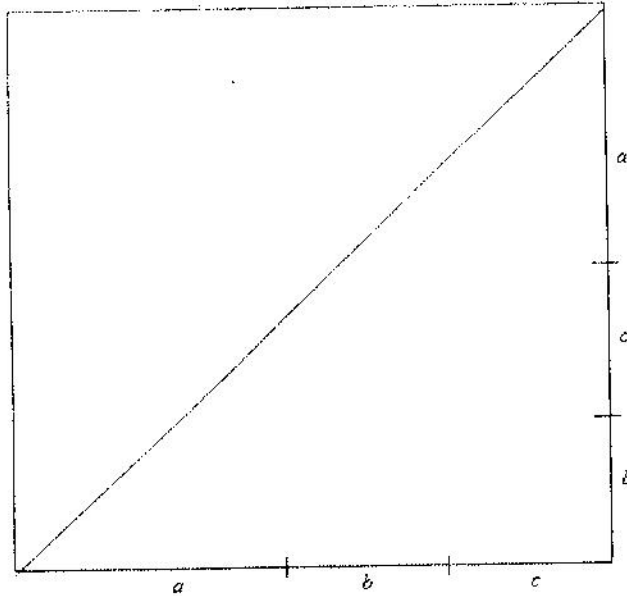
試問：B 考生本次考試成績會較 A 考生的成績高的機率是多少？ (5分)

(3) 續上題。試問當 A, B 兩人座位相鄰且 B 考生第一題答錯時，A 考生第一題答對的機率爲何？ (8分)

第六題

(1) 設 a, b, c 為正實數，試比較 $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2}$ 和 $\sqrt{2}(a+b+c)$ 的大小關係。

(a) 考慮邊長為 $a+b+c$ 的正方形如下圖，證明你的結論。(4分)



(b) 試用其他方法，證明你的結論。(4分)

(2) 請討論 $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2} = \sqrt{2}(a+b+c)$ 的情形。(5分)

(3) 能否將上述 (1) 的結論推廣到更一般的情形？請說明理由。(5分)