

國立交通大學應用數學系九十一學年大學推甄筆試試題

1、解不等式 $\log_3(x+2) \leq \frac{1}{2} + \log_9(2x+3)$ 。 (10分)

2、請證明矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ 可逆，並求其反矩陣 A^{-1} 。 (10分)

3、(1) 令 n 爲一正整數，請證明：若 n^2 爲 3 的倍數，則 n 亦爲 3 的倍數。 (10分)

(2) 請證明： $\sqrt{3}$ 爲一無理數。 (10分)

4、某學系推甄口試，每位考生要過三關，每關每位考生抽考一個題目，第一關有三個題目備抽，第二關有四個題目備抽，第三關有五個題目備抽，每個題目都不一樣。請問：甲乙兩考生抽考的各三個題目中有二題以上相同的機率是多少？ (10分)

在坐標平面上，將坐標軸適當的平移和旋轉，可將二元二次方程式

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (*)$$

化成圓錐曲線的標準型式。

5、請推導出坐標軸平移的公式，以消去 (*) 式中的一次項。 (10分)

6、若將坐標軸旋轉 θ 角，成 $X-Y$ 坐標系，請推導出平面上一點 P 的新舊坐標的關係式，並請推導出 θ 角的公式，以消去 (*) 式中的 xy 項。 (10分)

7、請將方程式 $13x^2 + 10xy + 13y^2 - 26\sqrt{2}x - 10\sqrt{2}y - 46 = 0$ 利用坐標軸的平移和旋轉化爲圓錐曲線的標準型式。 (10分)

8、令 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 爲一遞迴數列： $a_1 = 3, a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 5), n = 1, 2, 3, \dots$

請證明：(1) $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$ (10分)

(2) $a_n \leq 5, n = 1, 2, 3, \dots$ (10分)