

國立交通大學應用數學系
一百零五學年度大學申請入學考試試題

說明：

- (1) 本試卷共五題計算證明題，總分共 100 分。測驗時間為 100 分鐘。
- (2) 答題時請仔細寫下解題與計算過程。若只寫答案，則該題不予計分。
- (3) 請依題號順序作答。
- (4) 繳卷時請同時繳回題目卷。

1. 設函數 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 對任意 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ 皆滿足 $f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2)$ 。令 $f(1) = r$ 。

(a) (10 分) 試問 $f(-1), f(0), f\left(\frac{3}{2}\right)$ 與 $f(3)$ 所有可能的值為何？

(b) (5 分) 試證：若 f 不是零函數（即 $f(x) \not\equiv 0$ ），則 $f(x) > 0$ ，對任意 $x \in \mathbb{R}$ 。

(c) (5 分) 試證： $\frac{f(a)+f(b)}{2} \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ ，對任意 $a, b \in \mathbb{R}$ 。

2. (a) (5 分) 下表為 A 車在高速公路上行駛各路段的平均速率：

0-95 (公里)	95-215 (公里)	215-350 (公里)	350-425 (公里)
95 (公里/小時)	80 (公里/小時)	90 (公里/小時)	75 (公里/小時)

試求 A 車全程 (0--425 公里) 的平均速率為何？

(b) (5 分) 下表為 B 車在高速公路兩偵測點的瞬時時間：

125 (公里)	200 (公里)
上午十時二十八分	上午十時五十八分

試求 B 車在兩偵測點間的平均速率為何？

(c) (5 分) 若超速的定義為在高速公路上任何時刻的瞬時速率超過 100 (公里/小時)。試問 A 車有否超速？請解釋理由。

(d) (5 分) 超速定義同小題(c)，試問 B 車有否超速？請解釋理由。

3. 假設 α, β 和 γ 是 3 銳角的角度。 x, y 和 z 是 3 實數滿足底下的關係式

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= x - 1, \\ 2 \tan \beta + 3 &= y, \\ \sec \gamma + 3 &= z.\end{aligned}$$

(a) (6 分) 請問 x, y 和 z 最大可能範圍分別為何？並請說明原因。

(b) (5 分) 請將 $\sin(\alpha + \gamma)$ 改寫為 x 和 z 的函數。

(c) (9 分) 請將 $\sqrt{8x - 4x^2}, \sqrt{y^2 - 6y + 13}$ 和 $\sqrt{z^2 - 6z + 8}$ 分別改寫為 $\alpha,$

β 和 γ 的函數，並化簡。

4. (a) (2分)在座標平面上，以原點為軸心，將點 (x, y) 依逆時針方向旋轉 θ 角後的新座標 (x', y') 為何？請以旋轉矩陣 R 相乘的關係式

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ 表之，} R = ?$$

- (b) (8分)今有一圓錐(二次)曲線： $13x^2 - 10xy + 13y^2 - 72 = 0$ ，設想其上的每一點 (x, y) 均依上題(a)的方式旋轉 θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) 角後，各自的新座標 (x', y') 若能符合新的方程式 $A(x')^2 + B(y')^2 + Cx' + Dy' - 1 = 0$ (A, B, C, D 為係數)。試問： $\theta = ?$ 以及 $A = ? B = ? C = ? D = ?$

提示：以 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ 代入此二次曲線的原始方程式，求解 θ 使得 $x'y'$ 項的係數為 0。

- (c) (2分)依上題(b)旋轉完成的新方程式判斷其圖形為何？(拋物線？橢圓？雙曲線？)
- (d) (3分)繪出小題(b)原始方程式的二次曲線在 $x-y$ 直角座標平面上的圖形。
- (e) (5分)求新方程式的圖形在 $-2 \leq x' \leq 5, |y'| \leq 4$ 的區域內所圍住的面積？(只能使用高中、國中、國小課本內所列的面積公式，超出此規範者以零分計)。

提示：運用伸縮矩陣將座標 (x', y') 做伸縮變換，俾能進一步化簡小題(c)圖形的方程式；得出面積後，再藉由線性變換的面積比公式反推之。

5. 志明是一個朝九晚五的上班族，每天固定從甲地走路到乙地上班，下班時再從乙地走路返回甲地。假設志明每天上下班時碰到下雨的機率相互獨立，且天氣預報員預報四月 8-10 日三天的降雨機率是 50%。

- (a) (4分)如果志明沒有傘，那在這三天裡上下班期間會淋到雨的機率為何？

- (b) (8分)有鑑於下雨機率偏高，志明在四月 7 日晚上買了一把傘放在甲地。在接下來三天，如果上班(或下班)時不下雨，則不論手邊是否有傘，志明一律不帶傘。但如果上班(或下班)時下雨但手邊沒有傘，志明則淋雨上班(或下班)。請問志明四月 9 日下班返回甲地後，傘在甲地的機率為何？

- (c) (8分)接續小題(b)，請問志明在三天裡被淋到雨的機率有多高？