

國立交通大學應用數學系
九十七學年度大學甄選入學考試試題

說明：

- (1) 答題之前請先檢查所取得之答案卷是否正確。
- (2) 本試卷共五題計算證明題，總分共計 100 分。測驗時間為 110 分鐘。
- (3) 答題時，請仔細寫下解題與計算過程。若只寫答案，則該題不予計分。
- (4) 請依題號順序作答。
- (5) 繳卷時請同時繳回題目卷。

第一題 (20 分)

- (1) (7 分) 假設 θ 是正 n 邊形之外角，請證明

$$1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \cdots + \cos(n-1)\theta = 0$$

$$\sin \theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta + \cdots + \sin(n-1)\theta = 0$$

- (2) (6 分) 試以 $(0,0)$ 、 $(1,0)$ 這線段為其中一邊的正五邊形，請解釋(1)這兩個等式的幾何意義。

- (3) (7 分) 假設 $0 < \theta < 2\pi$ ，請證明

$$1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \cdots + \cos n\theta = \frac{\cos \frac{n\theta}{2} \sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

$$\sin \theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta + \cdots + \sin n\theta = \frac{\sin \frac{n\theta}{2} \sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

第二題 (20 分)

若

$$C = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (1) (4 分) 請求出行列式 $\det C$ 。
- (2) (4 分) 請求出 $C^2 - 2C$ 。
- (3) (6 分) 請問是否存在實數 a, b 使得 $C^{-1} = aC + bI$? 如果存在, 請求出 a, b 。如
果不存在, 請述明理由。
- (4) (6 分) 請求出行列式 $\det(C^{97} + 3C + 28I)$ 。

第三題 (20 分)

(1) (4 分) 請化簡 $\log_{\sqrt{8}} \sqrt{5} + \log_{\frac{1}{8}} 5$ 。

(2) (4 分) 請化簡 $\log_8 \left(\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} \right)$ 。

(3) (5 分) 設若 $x = \sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$ ，請求出 $\log_8(x^3 - 4x - 12)$ 。

(4) (7 分) 如果已知 $\log_8 x + \log_8 y = 5$ ，請求出 $2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{y}$ 的極小值。

第四題 (20 分)

- (1) (6 分) 在座標平面上，請求出點 $P(2,3)$ 到圓 $C : x^2 + y^2 = 1$ 的所有切線方程式。
- (2) (4 分) 在座標平面上，請給出二元二次方程式 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 的圖形是圓， a, b 與 c 須滿足之關係式。
- (3) (4 分) 在座標平面上，給定一點 $P(x_0, y_0)$ 及一圓 $C : x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ ，請給出點 P 到圓 C 恰好有二條切線， x_0, y_0, a, b 與 c 須滿足之關係式，並描述其幾何意義。
- (3) (6 分) 在座標平面上，給定一點 $P(x_0, y_0)$ 及一圓錐曲線 $\Gamma : Ax^2 + By^2 + C = 0$ ，請給出點 P 到圓錐曲線 Γ 恰好有二條切線， x_0, y_0, A, B 與 C 須滿足之關係式，並描述其幾何意義。

第五題 (20 分)

一副撲克牌有四種花色，每種花色有 1 到 13 不同的點數，共 52 張牌，假設每一張牌被抽出的機率均等。

- (1) (2 分) 任選出五張，請問有多少種不同的情形？
- (2) (6 分) 任選出五張，不看花色，僅看牌上的點數，請問有多少種不同的點數組合？
- (3) (6 分) 任選出五張，出現花色不全相同，且五張的點數連續或是「1, 10, 11, 12, 13」的機率為何？
- (4) (6 分) 任選五張，不看花色，至少兩張點數相同的機率為何？